Facharbeit Seminar

Fibonacci Zahlen

Inwieweit kann die Berechnung der Fibonacci Zahlen durch verschiedene Algorithmen optimiert werden? (Das ist nur eine *schlechte* Beispielfrage.)

Felix Lu

28. Januar 2026

Christianeum
Informatik
Herr Schiweck und Herr Grabbe

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Dies ist eine Beispielverwendung von LaTeX für eine Facharbeit anhand von Fibonacci Zahlen.

2 Die klassische Fibonacci Folge

Die Fibonacci-Zahlen sind eine Zahlenfolge, die durch die lineare Rekursionsgleichung definiert ist:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{1}$$

Konventionell definieren wir $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$.

Wir können somit einige der ersten Fibonacci-Zahlen berechnen, z.B.: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1.597, 2.584, 4.181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040, 1346269 usw. berechnen.

3 Implemetierung der Rekursion

Diese Rekursion (1) lässt sich in diversen Programmiersprachen einfach implemetieren, weil die meisten Sprachen schon Funktionen besitzen und sich rekusiv aufrufen können. Wir müssen nur die Ausstiegsbedingungen definieren.

Beispiel für rekursiven Python-Code zur Berechnung der n-ten Fibonacci Zahl:

```
def fibonacci(n):
  if n == 0: return 0
  elif n == 1: return 1
  else: retrun fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2)
```

4 Die explizite Formel / Formel von Binet

Schlaue Mathematiker haben sich schonmal gefragt, wie man die Berechnung der Fibonacci Zahlen schneller machen könnte. Sie haben dabei eine expizite Formel gefunden:

$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \tag{2}$$

Die Gleichung (2) zeigt, dass es eine effizientere Methode gibt, Fibonacci-Zahlen ohne Rekursion zu berechnen.

5 Beweis der expliziten Formel

Ein Beweis lässt sich mit der vollständigen Induktion einfach zeigen. Leider bin ich gerade zu faul, um ihn zu tippen. Zudem möchte ich ja auch noch die Zitierfunktion von LaTeX zeigen. Daher folgen einige wissenschaftliche Artikel über die Fibonacci Zahlen. (Das sind Artikel, die Fibonacci im Namen haben und ganz oben in der Google-Scholar-Suche erschienen sind.)

Irgendein Artikel.[1]

Noch ein Artikel.[2]

Nicht in alphabetischer Reihenfolge, aber im Literaturverzeichnis immer noch alphabetisch nach Nachnamen der Autoren.[3]

Die Seitenzahlen stimmen natürlich nicht mit den Seitenzahlen im Artikel. Sie enthalten jedoch eine versteckte Nachricht. Kannst du sie finden?[4]

Hier noch mal die gleiche Quelle in Kurzform.[5] Die Kurzform wird automatisch aktiviert, wenn dieselbe Quelle bereits erwähnt wurde. Leider funktioniert der "ebd." Verweis nicht richtig.

6 Implementierung der expliziten Formel

Die explizite Formel im einer Programmiersprache darzustellen ist zwar möglich, aber schwierig. Zwar sind ϕ und ψ algebraisch, aber immer noch irrational. Da $|\psi| < 1$ können wir diesen Term bei großen n vernachlässigen. Bei ϕ ist das jedoch ganz anders, denn $|\phi| > 1$. Um ein genaues Ergebnis zu berechnen, bräuchten wir also für größere n immer mehr Nachkommastellen.

Ein naives Codebeispiel in Python:

```
import math

def fibonacci_explizit(n):
    phi = (1 + math.sqrt(5)) / 2
    psi = (1 - math.sqrt(5)) / 2

    ergebnis = (phi**n - psi**n) / math.sqrt(5)

    return int(round(ergebnis))
```

[1] Horadam: „A Generalized Fibonacci Sequence", in: *The American Mathematical Monthly* 68(5), 1961, S. 13.

[2] Waddill und Sacks: „Another Generalized Fibonacci Sequence", in: *The Fibonacci Quarterly* 5(3), 1967, S. 21.

[3] Kalman und Mena: „The Fibonacci Numbers—Exposed", in: *Mathematics Magazine* 76(3), 2003, S. 34.

[4] Knox: „Fibonacci Sequences in Finite Groups", in: *The Fibonacci Quarterly* 30(2), 1992, S. 55.

[5] Knox 1992, 89f.

Dieser Code wird für kleine n funktioniert. Aber da Python Gleitkommazahlen dem IEEE 754 Double-Precision-Standard (siehe Anhang A) folgen, werden Zahlen über einer 64-Bit Genauigkeit nicht richtig berechnen.

7 Fazit

Das ist das Ende des LaTeX Beispiel.

Es folgen noch das Literaturverzeichnis, Anhang A, das Abkürzungsverzeichnis, die Hilfsmittelangabe und die Eigenständigkeitserklärung.

Literatur

A. F. Horadam: „A Generalized Fibonacci Sequence“, in: *The American Mathematical Monthly* 68(5), 1961, S. 455–459.

Dan Kalman und Robert Mena: „The Fibonacci Numbers—Exposed“, in: *Mathematics Magazine* 76(3), 2003, S. 167–181.

Steven W. Knox: „Fibonacci Sequences in Finite Groups“, in: *The Fibonacci Quarterly* 30(2), 1992, S. 116–120.

Marcellus E. Waddill und Louis Sacks: „Another Generalized Fibonacci Sequence“, in: *The Fibonacci Quarterly* 5(3), 1967, S. 209–222.

Anhang

A IEEE 754 Double-Precision-Standard

Der IEEE 754 Double-Precision-Standard verwendet 64 Bit zur Darstellung von Gleitkommazahlen und bietet eine Genauigkeit von etwa 15 bis 17 Dezimalstellen. Er besteht aus 1 Vorzeichenbit, einem 11-Bit-Exponenten mit Vorzeichen (Vorzeichen von 1023) und einer 52-Bit-Mantisse (Bruchteil), wodurch ein Bereich von etwa 10^{-308} bis 10^{308} möglich ist. Dieses Format unterstützt normalisierte Zahlen, subnormale Zahlen, vorzeichenbehaftete Nullen, Unendlichkeiten und NaNs. (KI-generiert)

Abkürzungsverzeichnis

Abkürzung	Bedeutung
Φ	Goldener Schnitt (ca. 1,618)
Ψ	Konjugierter Wert des Goldenen Schnitts (ca. -0,618)
CIN	Christianeums-Industrienorm

Hilfsmittelangabe

Für die Erstellung der Beispielverwendungen wurden verschiedene KI-Werkzeuge verwendet, unter anderem ChatGPT, Google Gemini und GitHub Copilot.

Die Formulierungen wurden von DeepL überarbeitet.

Eigenständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt habe und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Insbesondere versichere ich, dass ich alle wörtlichen und sinngemäß Übernahmen aus anderen Werken als solche kenntlich gemacht habe.

28. Januar 2026, Felix Lu